

УДК 621.313

DOI: <https://doi.org/10.15407/publishing2026.73.071>

ВИЗНАЧЕННЯ ДИСКРЕТНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ЗА КОМБІНОВАНИМ КВАДРАТИЧНИМ КРИТЕРІЄМ ЗАКОНУ КЕРУВАННЯ ІНЕРЦІЙНИМ ОБ'ЄКТОМ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Ю.В. Шуруб^{1*}, канд. техн. наук, А.А. Руденський^{2**}

1 – Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Берестейський, 56, Київ, 03057, Україна

2 – Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв Оборони, 15, Київ, 03041, Україна

e-mail: yvshur@ukr.net

Стаття присвячена отриманню методики визначення оптимального за комбінованим квадратичним критерієм закону керування інерційним об'єктом за методом дискретного динамічного програмування. Використання комбінованого квадратичного критерію оптимальності дає змогу забезпечити точність виконання технологічного процесу та обмеження на енергетичні витрати. Функціонал якості комбінованого квадратичного критерію оптимальності являє собою квадратичну форму координат стану об'єкта та керуючих дій. Визначено, що оптимальний за комбінованим квадратичним критерієм закон керування інерційним об'єктом є лінійним за дискретним часом. Проаналізовано вплив періоду дискретизації на точність відтворення оптимальної траєкторії вихідної координати об'єкта керування. Бібл. 14, рис. 4, таблиця.

Ключові слова: оптимальне керування, динамічне програмування, функціонал якості, критерій оптимальності.

Вступ. Необхідність забезпечення якості технологічних процесів за одночасної мінімізації втрат енергії обумовлює застосування оптимальних систем керування, що гарантують комбінований квадратичний критерій оптимальності, де функціонал якості є квадратичною формою координат стану об'єкта та керуючих дій. Такий критерій дає змогу враховувати точність відтворення заданої дії та обмеження на енергетичні витрати.

Серед методів отримання оптимальних законів керування, таких як варіаційне числення [1, 2] та метод принципу максимуму [3, 4], метод динамічного програмування виділяється відсутністю необхідності розв'язку крайових задач, що виникають при накладанні обмежень на керування та на фазові координати об'єкта [5], які можуть бути такими, що не мають аналітичного розв'язку, зокрема, при великому порядку об'єкта керування. У рамках цієї роботи розглядатимемо скалярні рівняння динамічного програмування одновимірних систем оптимального керування об'єктами першого порядку. Але розглянута послідовність визначення оптимального дискретного закону керування, яка досить легко алгоритмізується, може бути розповсюджена і на багатомірні системи оптимального керування об'єктами вищих порядків при заміні у рівняннях динамічного програмування скалярних величин векторними.

В основі методу динамічного програмування лежить принцип оптимальності Р.Беллмана, одним з формулювань якого є таке твердження: кожна кінцева ділянка оптимальної траєкторії є зі свого боку оптимальною. Інше формулювання цього принципу: майбутня поведінка системи при оптимальному керуванні залежить тільки від стану системи на цей час та мети керування й не залежить від «передісторії», або поведінки системи в минулому.

Метод динамічного програмування може застосовуватись для синтезу регуляторів, що реалізують оптимальні закони керування як функції координат об'єкта в замкнених системах регулювання [6, 7], що, зокрема, дає змогу застосовувати оптимальне керування в умовах дії на об'єкт керування стохастичних збурень [5, 8, 9], а також для отримання оптимальних законів керування як функцій часу в розімкнених системах. В останньому випадку застосування оптимального керуючого пристрою дає змогу здійснити керований перехід об'єкта керування з одного усталеного режиму роботи до іншого (наприклад, частотний пуск асинхронного двигуна [10] за допомогою задавача інтенсивності) за мінімальних втрат.

В окремих випадках метод динамічного програмування може бути застосований до неперервних систем керування [11], але основна сфера його застосування лежить в області оптимізації дискретних автоматичних систем, що дає змогу реалізовувати оптимальний закон засобами цифрового керування. Однак водночас можуть виникати значні обчислювальні складності, пов'язані зі зростанням обсягу обчислень.

У межах цієї роботи розглядається узагальнена методика отримання дискретного оптимального закону керування як функції часу, що забезпечує комбінований квадратичний критерій оптимальності, інерційних об'єктів, до яких можна віднести нагрівні елементи, двигуни, генератори тощо [12] за допомогою методу динамічного програмування в дискретній формі.

Метою цієї роботи є отримання методики визначення дискретного оптимального за комбінованим квадратичним критерієм закону керування інерційним об'єктом за методом динамічного програмування та знаходження цього закону як функції дискретного часу.

Обґрунтування комбінованого квадратичного критерію оптимальності. Серед відомих критеріїв оптимальності розповсюдженим є критерій мінімуму середньої квадратичної похибки регулювання, що виражається функціоналом такого вигляду: $I = \int_{t_0}^{t_k} \delta^2(t) dt \rightarrow \min$,

де $\delta(t) = x(t) - x_r(t)$ – відхилення керованої змінної стану $x(t)$ від заданого значення $x_r(t)$ [6].

Тоді оптимальне керування має переводити систему з початкового $\delta(t_0)$ у кінцеве положення $\delta(t_k) = 0$ за час $T = t_k - t_0$ та забезпечувати мінімум заданого функціоналу. Для розімкнених систем, що мають здійснювати керований перехід об'єкта керування з одного усталеного режиму роботи до іншого (наприклад, пуск електродвигуна з нульової швидкості до заданої, яку можемо позначити як відносну одиницю), прийнемо $x_r(t) = x_r = 1$ (в.о.). Тоді оптимальне

керування повинно забезпечувати функціонал якості $I = \int_{t_0}^{t_k} x^2(t) dt \rightarrow \min$ та переводити змінну стану $x(t)$ із положення $x(t_0)$ у положення $x(t_k) = 1$ за час $T = t_k - t_0$.

Іншим розповсюдженим критерієм оптимальності є критерій мінімальних втрат енергії від керуючої дії $u(t)$. Наприклад, за деяких припущень втрати в обмотці якоря двигуна постійного струму пропорційні квадрату його напруги живлення [11]. За цього критерію оптимальне керування при переведенні вихідної величини об'єкта керування з початкового $x(t_0)$ у кінцевий стан $x(t_k)$ за час $T = t_k - t_0$ має забезпечувати мінімум функціонала

$$I = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Поєднання вказаних двох квадратичних критеріїв дає змогу отримати комбінований квадратичний критерій оптимальності, що залежить від координат стану об'єкта та керуючих дій

$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_k} (x^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min$, що забезпечує компромісне налаштування закону керування за врахування точності відтворення заданої дії та обмеження на енергетичні витрати.

У загальному випадку квадратичний комбінований критерій оптимальності може бути застосований також для визначення оптимального за втратами закону керування об'єктами, втрати енергії в яких визначаються і координатами стану, і керуючими діями.

Обґрунтування методу динамічного програмування в дискретній формі. Нехай об'єкт керування описується рівнянням першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, u). \quad (1)$$

Нехай при $t = 0$ та при $x = x(0)$ необхідно знайти керування $u(t)$, що мінімізує інтеграл

$$Q = \int_0^T G(x, u) dt. \quad (2)$$

Перейдемо до дискретної моделі та запишемо диференціальне рівняння (1) у різнице-
вій формі:

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} = f_1[x(k), u(k)] \quad (3)$$

або

$$x(k+1) = x(k) + f[x(k), u(k)], \quad (4)$$

де $f[x(k), u(k)] = f_1[x(k), u(k)]\Delta t$.

Функціонал (2) наближено замінимо сумою

$$Q = \sum_{n=0}^{N-1} G[x(n), u(n)]. \quad (5)$$

Тепер задача полягає у визначенні послідовності дискретних $u(k)$, які мінімізують суму (5) при умовах $x = x(0)$, $u \in \Omega(u)$.

Отже, необхідно знайти мінімум складної функції N змінних $[u(0), u(1), \dots, u(N)]$. Однак динамічне програмування дає можливість звести цю операцію до послідовної мінімізації функції однієї змінної.

Для розв'язку задачі застосовується засіб, що полягає у зворотному рухові від кінця процесу до його початку.

Розглянемо спочатку момент часу $t = (N-1)\Delta t$. Передбачається, що всі значення $u(k)$, крім останнього, вже в якийсь спосіб відбулись, водночас система зайняла якийсь стан $x(N-1)$. Згідно з принципом оптимальності керуюча дія в момент часу $t = (N-1)\Delta t$ не залежить від «передісторії» і визначається лише станом $x(N-1)$ та метою керування. Величина $u(N-1)$ впливає лише на ті члени суми (5), які відносяться до ділянки часу від $t = (N-1)\Delta t$ до $t = N\Delta t$. Позначимо суму цих членів Q_{N-1} :

$$Q_{N-1} = G[x(N-1), u(N-1)]. \quad (6)$$

Відповідно до (4), запишемо

$$x(N) = x(N-1) + f[x(N-1), u(N-1)]. \quad (7)$$

Знайдемо $u(N-1)$, яке задовольняє (7) та мінімізує (6). Позначимо мінімальні для кожного $x(N-1)$ значення Q_{N-1} через S_{N-1} , тоді

$$S_{N-1}[x(N-1)] = \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} Q_{N-1} = \min_{u(N-1) \in \Omega(u)} \{G[x(N-1), u(N-1)]\}. \quad (8)$$

Звернемо увагу на те, що для визначення S_{N-1} треба проводити мінімізацію лише за однією змінною $u(N-1)$. Цю функцію необхідно запам'ятати перед переходом до наступних кроків.

Розглянемо тепер наступний крок:

$$Q_{N-2} = G[x(N-2), u(N-2)] + G[x(N-1), u(N-1)]. \quad (9)$$

Знайдемо S_{N-2} як мінімум Q_{N-2} по $u(N-2)$ та $u(N-1)$. Але мінімальні значення по $u(N-1)$ – S_{N-1} – нами вже знайдені для кожного $x(N-1)$. Тоді

$$S_{N-2}[x(N-2)] = \min_{\substack{u(N-2) \in \Omega(u) \\ u(N-1) \in \Omega(u)}} Q_{N-2} = \min_{u(N-2) \in \Omega(u)} \{G[x(N-2), u(N-2)] + S_{N-1}[x(N-1), u(N-1)]\}, \quad (10)$$

а

$$x(N-1) = x(N-2) + f[x(N-2), u(N-2)]. \quad (11)$$

І в цьому випадку мінімізація проводилась лише за $u(N-2)$ однією змінною. Тепер у пам'ять треба занести S_{N-2} та стерти непотрібні вже S_{N-1} .

Слід відзначити, що $u(N-2)$ мінімізує весь вираз (10), у той час як $G[x(N-2), u(N-2)]$ – зовсім не оптимальна. Оптимальна стратегія враховує кінцеву мету – мінімізацію всього виразу (10).

Переходячи до k -го кроку, одержимо

$$S_{N-k}[x(N-k)] = \min_{u(N-k) \in \Omega(u)} \{G[x(N-k), u(N-k)] + S_{N-k+1}[x(N-(k+1)), u(N-(k+1))]\}, \quad (12)$$

а

$$x(N-k) = x(N-(k+1)) + f[x(N-(k+1)), u(N-(k+1))]. \quad (13)$$

Паралельно у процесі мінімізації знаходимо оптимальні значення $u(N-k)$.

Формула (12) є рекурентним співвідношенням для визначення функціонала на будь-якому кроці. Закінчується процедура розрахунку при доведенні до початкової точки $x(0)$, коли знайдено значення $u(0)$ – керуючу дію у початковий момент.

Результати досліджень. Ця стаття присвячена отриманню методики визначення дискретного оптимального керування об'єктом, що може бути описаний передатною функцією інерційної ланки $W(s) = K(Ts + 1)^{-1}$ без конкретизації його фізичної природи (наприклад, нагрівний елемент, електродвигун постійного струму або асинхронний зі скалярним частотним керуванням за врахування тільки електромеханічної інерції та зневажання електромагнітною інерцією) для окремого прикладу з одиничними параметрами передатної функції. Але отримана послідовність визначення оптимального закону керування може бути застосована і для інших значень цих параметрів.

Інерційний об'єкт керування з одиничними коефіцієнтом передачі $K = 1$ та сталою часу $T = 1$ у формі Коші описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = u - x. \quad (14)$$

Необхідно визначити керування, яке переводить стан системи з $x(0) = 0$ у $x(1) = 1$, причому критерій якості має вигляд функціоналу:

$$I(x, u) = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \rightarrow \min. \quad (15)$$

Будемо розв'язувати дискретну задачу. На етапі визначення послідовності розрахунків за методикою, що розглядається, для зменшення кількості обчислень виберемо період дискретизації $\Delta t = 0,2$ с, при цьому початковий та кінцевий стани системи є заданими: $x_0 = 0,0$ в.о, $x_x = 1,0$ в.о. Розіб'ємо інтервал часу на частини (с): $t_0 = 0,0$; $t_1 = 0,2$; $t_2 = 0,4$; $t_3 = 0,6$; $t_4 = 0,8$; $t_5 = 1,0$. Координати x теж мають лише дискретні значення (в.о.) $x_0 = 0,0$; $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$; $x_5 = 1,0$.

Подамо (14) у різницевою вигляді:

$$\Delta x(k\Delta t) = [u(k\Delta t) - x(k\Delta t)] \cdot \Delta t, \quad (16)$$

звідки дискретні значення сигналу керування:

$$u(k\Delta t) = \frac{\Delta x(k\Delta t)}{\Delta t} + x(k\Delta t). \quad (17)$$

Функціонал (15) при переході до дискретних значень матиме вигляд

$$I(x, u) = \sum_{k=0}^4 [x^2(k\Delta t) + u^2(k\Delta t)] \Delta t. \quad (18)$$

Підставимо (17) у (18):

$$I(x, u) = \sum_{k=0}^4 \left[x^2(k\Delta t) + \left(\frac{\Delta x(k\Delta t)}{\Delta t} + x(k\Delta t) \right)^2 \right] \Delta t. \quad (19)$$

Приріст функціоналу на k -му кроці буде

$$\Delta I_k = [x^2(k\Delta t) + \left(\frac{\Delta x(k\Delta t)}{\Delta t} + x(k\Delta t) \right)^2] \Delta t. \quad (20)$$

Залежить приріст функціоналу (20) від стану об'єкта $x(k\Delta t)$ та приросту стану $\Delta x(k\Delta t)$.

Поставимо умову, що керована величина при переході з початкового $x_0 = 0,0$ у кінцевий стан $x_5 = 1,0$ не повинна зменшуватись, тобто значення x на поточному кроці не повинно бути меншим, ніж на попередньому. Ця умова обмежує кількість варіантів можливих переходів на кожному етапі.

Розрахунки значень ΔI_k при різних значеннях $x(k\Delta t)$ та $\Delta x(k\Delta t)$ зведемо у таблицю. Усього таких комбінацій може бути 21.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7
$x(k\Delta t)$	1	0,8	0,8	0,6	0,6	0,6	0,4
$\Delta x(k\Delta t)$	0	0	0,2	0	0,2	0,4	0
ΔI_k	0,4	0,256	0,776	0,144	0,584	1,424	0,064

№ п/п	8	9	10	11	12	13	14
$x(k\Delta t)$	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2
$\Delta x(k\Delta t)$	0,2	0,4	0,6	0	0,2	0,4	0,6
ΔI_k	0,424	1,184	2,344	0,016	0,296	0,976	2,056

№ п/п	15	16	17	18	19	20	21
$x(k\Delta t)$	0,2	0	0	0	0	0	0
$\Delta x(k\Delta t)$	0,8	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ΔI_k	3,536	0	0,2	0,8	1,8	3,2	5,0

1) Розв'язок почнемо з кінцевого етапу. У стан $x_5 = 1,0$ у момент часу $t_5 = 1,0$ об'єкт може перейти зі станів $x_0 = 0,0$; $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$; $x_5 = 1,0$ у момент часу $t_4 = 0,8$ при відповідних приростах стану. Значення приростів функціоналів якості ΔI_i^4 , ($i = 0, \dots, 5$ – порядковий номер стану об'єкта), обчислені за (20), при таких переходах будуть:

- а) $\Delta I_5^4 = 0,4$ при переході з $x_5 = 1,0$ у $x_5 = 1,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 1 таблиці);
- б) $\Delta I_4^4 = 0,776$ при переході з $x_4 = 0,8$ у $x_5 = 1,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,2$ – стовпчик № 3 таблиці);
- в) $\Delta I_3^4 = 1,424$ при переході з $x_3 = 1,0$ у $x_5 = 1,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,4$ – стовпчик № 6 таблиці);
- г) $\Delta I_2^4 = 2,344$ при переході з $x_2 = 0,4$ у $x_5 = 1,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,6$ – стовпчик № 10 таблиці);
- д) $\Delta I_1^4 = 3,536$ при переході з $x_1 = 0,2$ у $x_5 = 1,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,8$ – стовпчик № 15 таблиці);
- е) $\Delta I_0^4 = 5,0$ при переході з $x_0 = 0,0$ у $x_5 = 1,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 1,0$ – стовпчик № 21 таблиці).

Заносимо ці дані до схеми на рис. 1.

2) На наступному етапі обчислюємо прирости функціоналів при переході у стан $x_5 = 1,0$ із різних станів у момент часу $t_3 = 0,6$ за формулою

$$\Delta I_i^3 = \Delta I_{ik}^{34} + \Delta I_k^4,$$

де ΔI_{ik}^{34} – прирости функціоналу при переходах за різними траєкторіями з i -го стану у момент часу $t_3 = 0,6$ до k -го стану у момент часу $t_4 = 0,8$;

ΔI_k^4 – прирости функціоналу при переходах з k -го стану у момент часу $t_4 = 0,8$ до кінцевого стану $x_5 = 1,0$ у момент часу $t_5 = 1,0$.

а) Так, при переході зі стану $x_5 = 1,0$ при $t_3 = 0,6$ у стан $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$ можлива лише одна траєкторія. Тоді $\Delta I_{55}^{34} = 0,4$ (при $x(k\Delta t) = 1,0$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 1 таблиці) та приріст функціоналу

$$\Delta I_5^3 = \Delta I_{55}^{34} + \Delta I_5^4 = 0,4 + 0,4 = 0,8.$$

б) При переході зі стану $x_4 = 0,8$ при $t_3 = 0,6$ у стан $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$ можливі дві траєкторії.

Перша – з $x_4 = 0,8$ при $t_3 = 0,6$ у $x_4 = 0,8$ при $t_4 = 0,8$ та далі з $x_4 = 0,8$ при $t_4 = 0,8$ у $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$. При цьому $\Delta I_{44}^{34} = 0,256$ (при $x(k\Delta t) = 0,8$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 2 таблиці), та приріст функціоналу буде

$$\Delta I_4^3 = \Delta I_{44}^{34} + \Delta I_4^4 = 0,256 + 0,776 = 1,032.$$

Друга траекторія – з $x_4 = 0,8$ при $t_3 = 0,6$ у $x_5 = 1,0$ при $t_4 = 0,8$ та далі з $x_5 = 1,0$ при $t_4 = 0,8$ у $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$. При цьому $\Delta I_{45}^{34} = 0,776$ (при $x(k\Delta t) = 0,8$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,2$ – стовпчик № 3 таблиці), та приріст функціоналу буде

$$\Delta I_4^3 = \Delta I_{45}^{34} + \Delta I_5^4 = 0,776 + 0,4 = 1,16.$$

З цих двох значень ΔI_4^3 обираємо найменше $\Delta I_4^3 = 1,032$ та позначаємо на відповідній траекторії на рис. 1.

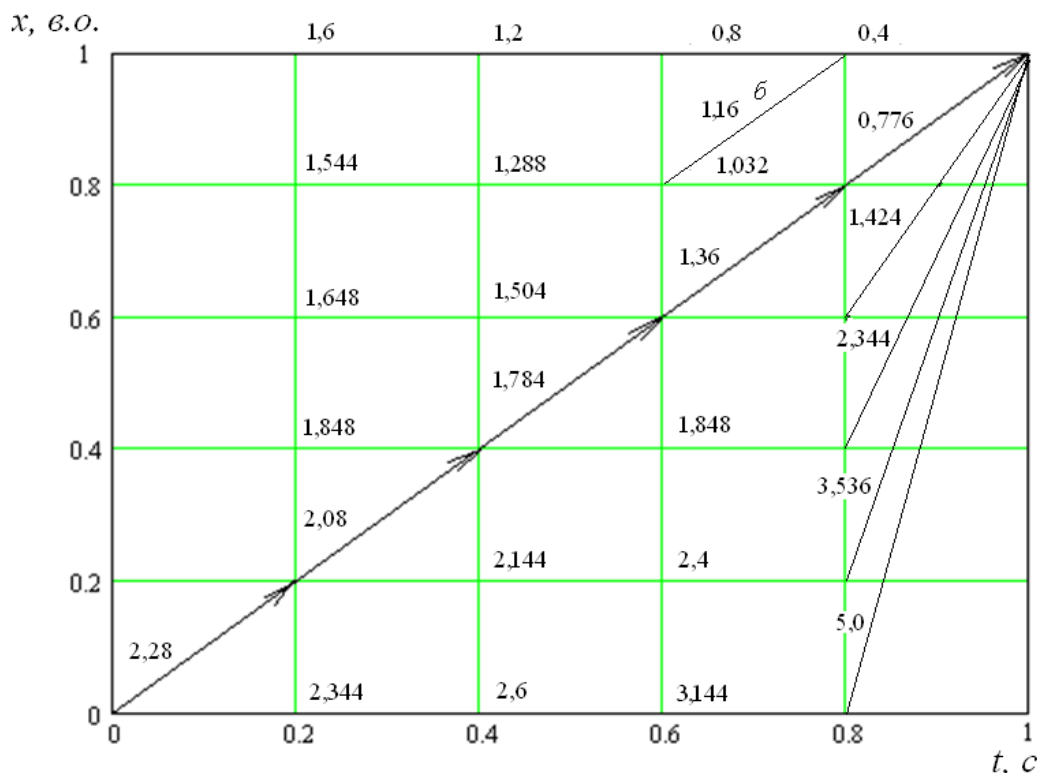


Рис. 1. Схема розрахунку оптимальної траекторії

Аналогічно розраховуємо мінімальні прирости функціоналу при інших траекторіях:

$$в) \Delta I_3^3 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{33}^{34} + \Delta I_3^4 = 0,144 + 1,424 = 1,568 \\ \Delta I_{34}^{34} + \Delta I_4^4 = 0,584 + 0,776 = 1,36 \\ \Delta I_{35}^{34} + \Delta I_5^4 = 1,424 + 0,4 = 1,824 \end{array} \right\} = 1,36;$$

$$г) \Delta I_2^3 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{22}^{34} + \Delta I_2^4 = 0,064 + 2,344 = 2,408 \\ \Delta I_{23}^{34} + \Delta I_3^4 = 0,424 + 1,424 = 1,848 \\ \Delta I_{24}^{34} + \Delta I_4^4 = 1,184 + 0,776 = 1,960 \\ \Delta I_{25}^{34} + \Delta I_5^4 = 2,344 + 0,4 = 2,744 \end{array} \right\} = 1,848;$$

$$д) \Delta I_1^3 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{11}^{34} + \Delta I_1^4 = 0,016 + 3,536 = 3,552 \\ \Delta I_{12}^{34} + \Delta I_2^4 = 0,296 + 2,344 = 2,64 \\ \Delta I_{13}^{34} + \Delta I_3^4 = 0,976 + 1,424 = 2,4 \\ \Delta I_{14}^{34} + \Delta I_4^4 = 2,056 + 0,776 = 2,832 \\ \Delta I_{15}^{34} + \Delta I_5^4 = 3,536 + 0,4 = 3,936 \end{array} \right\} = 2,4;$$

$$е) \Delta I_0^3 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{00}^{34} + \Delta I_0^4 = 0,0 + 5,0 = 5,0 \\ \Delta I_{01}^{34} + \Delta I_1^4 = 0,2 + 3,536 = 3,736 \\ \Delta I_{02}^{34} + \Delta I_2^4 = 0,8 + 2,344 = 3,144 \\ \Delta I_{03}^{34} + \Delta I_3^4 = 1,8 + 1,424 = 3,224 \\ \Delta I_{04}^{34} + \Delta I_4^4 = 3,2 + 0,776 = 3,976 \\ \Delta I_{05}^{34} + \Delta I_5^4 = 5,0 + 0,4 = 5,4 \end{array} \right\} = 3,144 .$$

Позначаємо отримані мінімальні значення ΔI_i^3 на відповідних траєкторіях схеми на рис. 1.

3) Далі обчислюємо прирости функціоналів при переході у стан $x_5 = 1,0$ із різних станів у момент часу $t_2 = 0,4$ за формулою

$$\Delta I_i^2 = \Delta I_{ik}^{23} + \Delta I_k^3,$$

де ΔI_{ik}^{23} – прирости функціоналу при переходах за різними траєкторіями з i -го стану в момент часу $t_2 = 0,4$ до k -го стану в момент часу $t_3 = 0,6$;

ΔI_k^3 – прирости функціоналу при переходах з k -го стану в момент часу $t_3 = 0,6$ до кінцевого стану $x_5 = 1,0$ в момент часу $t_5 = 1,0$.

а) При переході із стану $x_5 = 1,0$ при $t_2 = 0,4$ у стан $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$ можлива лише одна траєкторія. Тоді $\Delta I_{55}^{23} = 0,4$ (при $x(k\Delta t) = 1,0$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 1 таблиці) та приріст функціоналу

$$\Delta I_5^2 = \Delta I_{55}^{23} + \Delta I_5^3 = 0,4 + 0,8 = 1,2 .$$

Позначаємо це значення на відповідній траєкторії на рис. 1.

б) При переході зі стану $x_4 = 0,8$ при $t_2 = 0,4$ у стан $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$ можливі такі варіанти.

Перший – з $x_4 = 0,8$ при $t_2 = 0,4$ у $x_4 = 0,8$ при $t_3 = 0,6$. При цьому $\Delta I_{44}^{23} = 0,256$ (при $x(k\Delta t) = 0,8$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 2 таблиці). Далі можливі дві траєкторії:

а) з $x_4 = 0,8$ при $t_3 = 0,6$ у $x_4 = 0,8$ при $t_4 = 0,8$ та далі в $x_5 = 1,0$ (при цьому $\Delta I_4^3 = 1,032$),

б) з $x_4 = 0,8$ при $t_3 = 0,6$ у $x_5 = 1,0$ при $t_4 = 0,8$ та далі в $x_5 = 1,0$ (при цьому $\Delta I_4^3 = 1,16$).

Траєкторію з більшим приростом функціоналу якості (траєкторію б) не беремо до уваги, як таку, що не відповідає принципу оптимальності. Тоді приріст функціоналу в цьому варіанті буде

$$\Delta I_4^2 = \Delta I_{44}^{23} + \Delta I_4^3 = 0,256 + 1,032 = 1,288 .$$

Другий варіант – з $x_4 = 0,8$ при $t_2 = 0,4$ у $x_5 = 1,0$ при $t_3 = 0,6$ та далі у $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$. У цьому варіанті можлива лише одна траєкторія з $\Delta I_{45}^{23} = 0,776$ (при $x(k\Delta t) = 0,8$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,2$ – стовпчик № 3 таблиці), та приріст функціоналу буде

$$\Delta I_4^2 = \Delta I_{45}^{23} + \Delta I_5^3 = 0,776 + 0,8 = 1,576 .$$

З цих двох значень ΔI_4^2 обираємо найменше $\Delta I_4^2 = 1,288$ та позначаємо це значення на відповідній траєкторії на рис. 1.

Аналогічно розраховуємо мінімальні прирости функціоналу при інших траєкторіях:

$$в) \Delta I_3^2 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{33}^{23} + \Delta I_3^3 = 0,144 + 1,36 = 1,504 \\ \Delta I_{34}^{23} + \Delta I_4^3 = 0,584 + 1,032 = 1,616 \\ \Delta I_{35}^{23} + \Delta I_5^3 = 1,424 + 0,8 = 2,224 \end{array} \right\} = 1,504 ;$$

$$\text{г) } \Delta I_2^2 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{22}^{23} + \Delta I_2^3 = 0,064 + 1,848 = 1,912 \\ \Delta I_{23}^{23} + \Delta I_3^3 = 0,424 + 1,36 = 1,784 \\ \Delta I_{24}^{23} + \Delta I_4^3 = 1,184 + 1,032 = 2,216 \\ \Delta I_{25}^{23} + \Delta I_5^3 = 2,344 + 0,8 = 3,144 \end{array} \right\} = 1,784;$$

$$\text{д) } \Delta I_1^2 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{11}^{23} + \Delta I_1^3 = 0,016 + 2,4 = 2,458 \\ \Delta I_{12}^{23} + \Delta I_2^3 = 0,296 + 1,848 = 2,144 \\ \Delta I_{13}^{23} + \Delta I_3^3 = 0,976 + 1,36 = 2,336 \\ \Delta I_{14}^{23} + \Delta I_4^3 = 2,056 + 1,032 = 3,088 \\ \Delta I_{15}^{23} + \Delta I_5^3 = 3,536 + 0,8 = 4,336 \end{array} \right\} = 2,144;$$

$$\text{е) } \Delta I_0^2 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{00}^{23} + \Delta I_0^3 = 0,0 + 3,144 = 3,144 \\ \Delta I_{01}^{23} + \Delta I_1^3 = 0,2 + 2,4 = 2,6 \\ \Delta I_{02}^{23} + \Delta I_2^3 = 0,8 + 1,848 = 2,648 \\ \Delta I_{03}^{23} + \Delta I_3^3 = 1,8 + 1,36 = 3,16 \\ \Delta I_{04}^{23} + \Delta I_4^3 = 3,2 + 1,032 = 4,232 \\ \Delta I_{05}^{23} + \Delta I_5^3 = 5,0 + 0,8 = 5,8 \end{array} \right\} = 2,6.$$

Позначаємо отримані мінімальні значення ΔI_i^2 на відповідних траєкторіях на рис. 1.

4) Аналогічно природи функціоналів при переході у стан $x_5 = 1,0$ із різних станів у момент часу $t_1 = 0,2$ обчислюються за формулою

$$\Delta I_i^1 = \Delta I_{ik}^{12} + \Delta I_k^2,$$

де ΔI_{ik}^{12} – прирости функціоналу при переходах за різними траєкторіями з i -го стану в момент часу $t_1 = 0,2$ до k -го стану в момент часу $t_2 = 0,4$;

ΔI_k^2 – прирости функціоналу при переходах з k -го стану в момент часу $t_2 = 0,4$ до кінцевого стану $x_5 = 1,0$ в момент часу $t_5 = 1,0$.

а) При переході зі стану $x_5 = 1,0$ при $t_1 = 0,2$ у стан $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$ можлива лише одна траєкторія. Тоді $\Delta I_{55}^{12} = 0,4$ (при $x(k\Delta t) = 1,0$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 1 таблиці) та приріст функціоналу

$$\Delta I_5^1 = \Delta I_{55}^{12} + \Delta I_5^2 = 0,4 + 1,2 = 1,6.$$

Позначаємо це значення на відповідній траєкторії на рис. 1.

б) При переході зі стану $x_4 = 0,8$ при $t_1 = 0,2$ у стан $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$ можливі такі варіанти.

Перший – з $x_4 = 0,8$ при $t_1 = 0,2$ у $x_4 = 0,8$ при $t_2 = 0,4$. При цьому $\Delta I_{44}^{12} = 0,256$ (при $x(k\Delta t) = 0,8$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 2 таблиці). Серед подальших можливих траєкторій руху зі стану $x_4 = 0,8$ при $t_2 = 0,4$ обираємо траєкторію з найменшим приростом функціоналу $\Delta I_4^2 = 1,288$, як позначено на відповідній траєкторії на рис. 1.

Тоді приріст функціоналу в цьому варіанті буде

$$\Delta I_4^1 = \Delta I_{44}^{12} + \Delta I_4^2 = 0,256 + 1,288 = 1,544.$$

Другий варіант – з $x_4 = 0,8$ при $t_1 = 0,2$ у $x_5 = 1,0$ при $t_2 = 0,4$ та далі у $x_5 = 1,0$ при $t_5 = 1,0$. У цьому варіанті можлива лише одна траєкторія з $\Delta I_{45}^{12} = 0,776$ (при $x(k\Delta t) = 0,8$ приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,2$ – стовпчик № 3 таблиці), та приріст функціоналу буде

$$\Delta I_4^1 = \Delta I_{45}^{12} + \Delta I_5^2 = 0,776 + 1,2 = 1,978.$$

Із цих двох значень ΔI_4^1 обираємо найменше $\Delta I_4^1 = 1,544$ та позначаємо це значення на відповідній траєкторії на рис. 1.

Аналогічно розраховуємо мінімальні прирости функціоналу при інших траєкторіях:

$$в) \Delta I_3^1 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{33}^{12} + \Delta I_3^2 = 0,144 + 1,504 = 1,648 \\ \Delta I_{34}^{12} + \Delta I_4^2 = 0,584 + 1,288 = 1,872 \\ \Delta I_{35}^{12} + \Delta I_5^2 = 1,424 + 1,2 = 2,624 \end{array} \right\} = 1,648 ;$$

$$г) \Delta I_2^1 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{22}^{12} + \Delta I_2^2 = 0,064 + 1,784 = 1,848 \\ \Delta I_{23}^{12} + \Delta I_3^2 = 0,424 + 1,504 = 1,928 \\ \Delta I_{24}^{12} + \Delta I_4^2 = 1,184 + 1,288 = 2,472 \\ \Delta I_{25}^{12} + \Delta I_5^2 = 2,344 + 1,2 = 3,544 \end{array} \right\} = 1,848 ;$$

$$д) \Delta I_1^1 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{11}^{12} + \Delta I_1^2 = 0,016 + 2,144 = 2,160 \\ \Delta I_{12}^{12} + \Delta I_2^2 = 0,296 + 1,784 = 2,08 \\ \Delta I_{13}^{12} + \Delta I_3^2 = 0,976 + 1,504 = 2,48 \\ \Delta I_{14}^{12} + \Delta I_4^2 = 2,056 + 1,288 = 3,344 \\ \Delta I_{15}^{12} + \Delta I_5^2 = 3,536 + 1,2 = 4,736 \end{array} \right\} = 2,08 ;$$

$$е) \Delta I_0^1 = \min \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_{00}^{12} + \Delta I_0^2 = 0,0 + 2,6 = 2,6 \\ \Delta I_{01}^{12} + \Delta I_1^2 = 0,2 + 2,144 = 2,344 \\ \Delta I_{02}^{12} + \Delta I_2^2 = 0,8 + 1,784 = 2,584 \\ \Delta I_{03}^{12} + \Delta I_3^2 = 1,8 + 1,504 = 3,304 \\ \Delta I_{04}^{12} + \Delta I_4^2 = 3,2 + 1,288 = 3,488 \\ \Delta I_{05}^{12} + \Delta I_5^2 = 5,0 + 1,2 = 6,2 \end{array} \right\} = 2,344 .$$

Позначаємо отримані мінімальні значення ΔI_i^1 на відповідних траєкторіях на рис. 1.

5) На останньому етапі визначаємо прирости функціоналів при переході у стан $x_5 = 1,0$ із однієї вихідної точки $x_0 = 0,0$ за формулою

$$\Delta I_0^0 = \Delta I_{ik}^{01} + \Delta I_k^1,$$

де ΔI_{0k}^{01} – прирости функціоналу при переходах з 0-го стану в момент часу $t_0 = 0,0$ до k -го стану в момент часу $t_1 = 0,2$; ΔI_k^1 – прирости функціоналу при переходах з k -го стану в момент часу $t_1 = 0,2$ до кінцевого стану $x_5 = 1,0$ в момент часу $t_5 = 1,0$.

При цьому можливі 6 варіантів таких переходів:

а) $\Delta I_0^0 = 0 + 2,344 = 2,344$ при переході з $x_0 = 0,0$ у $x_1 = 0,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0$ – стовпчик № 16 таблиці);

б) $\Delta I_0^0 = 0,2 + 2,08 = 2,28$ при переході з $x_0 = 0,0$ у $x_1 = 0,2$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,2$ – стовпчик № 17 таблиці);

в) $\Delta I_0^0 = 0,8 + 1,848 = 2,648$ при переході з $x_0 = 0,0$ у $x_1 = 0,4$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,4$ – стовпчик № 18 таблиці);

г) $\Delta I_0^0 = 1,8 + 1,648 = 3,448$ при переході з $x_0 = 0,0$ у $x_1 = 0,6$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,6$ – стовпчик № 19 таблиці);

д) $\Delta I_0^0 = 3,2 + 1,544 = 4,744$ при переході з $x_0 = 0,0$ у $x_1 = 0,8$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 0,8$ – стовпчик № 20 таблиці);

е) $\Delta I_0^0 = 5,0 + 1,6 = 6,6$ при переході з $x_0 = 0,0$ у $x_1 = 1,0$ (приріст $\Delta x(k\Delta t) = 1,0$ – стовпчик № 21 таблиці).

Із цих значень приросту функціоналу обираємо найменше $\Delta I_{0\min}^0 = 2,28$. Отже, мінімальне значення сумарного критерію оптимальності $I_{\min} = 2,28$ досягається для траєкторії,

що показана на рис. 1 жирною лінією.

Таким чином, необхідне керування, яке через кожні 0,2 с збільшує вихідну величину x на 0,2. Дискретні значення сигналу керування при цьому мають відповідати формулі

$$u(k\Delta t) = \frac{\Delta x(k\Delta t)}{\Delta t} + x(k\Delta t)$$

та дорівнюватимуть (в.о.) $u_0 = 1$; $u_1 = 1,2$; $u_2 = 1,4$; $u_3 = 1,6$; $u_4 = 1,8$. Отже, отриманий оптимальний закон керування є лінійним за дискретним часом.

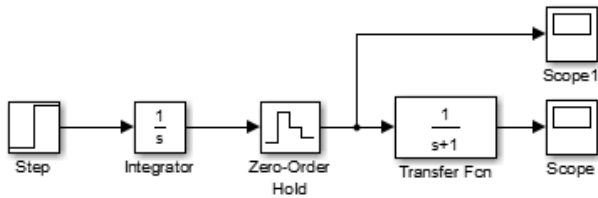
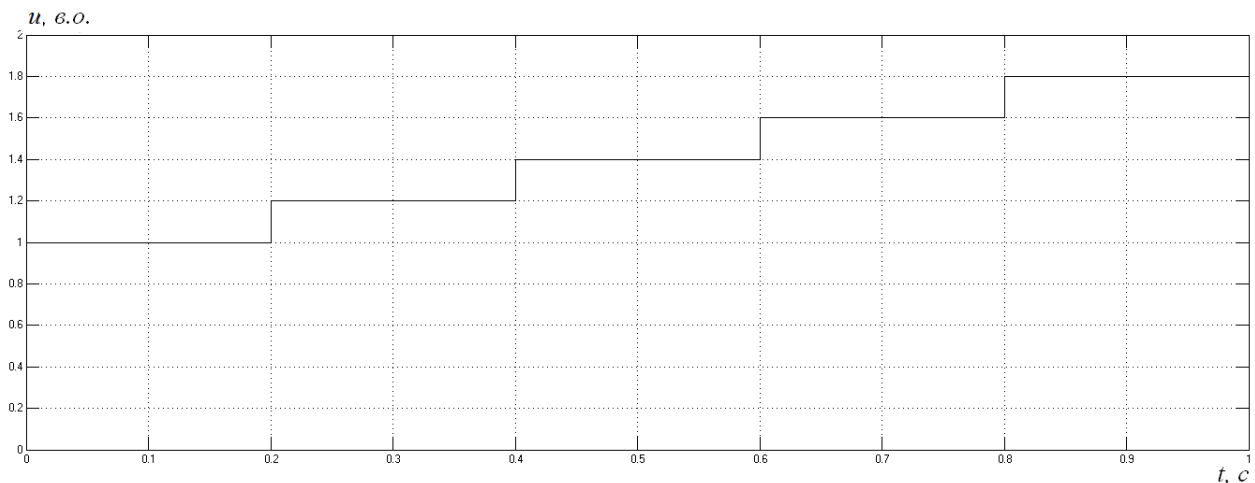


Рис. 2. Структурна схема дослідження розімкненої системи керування

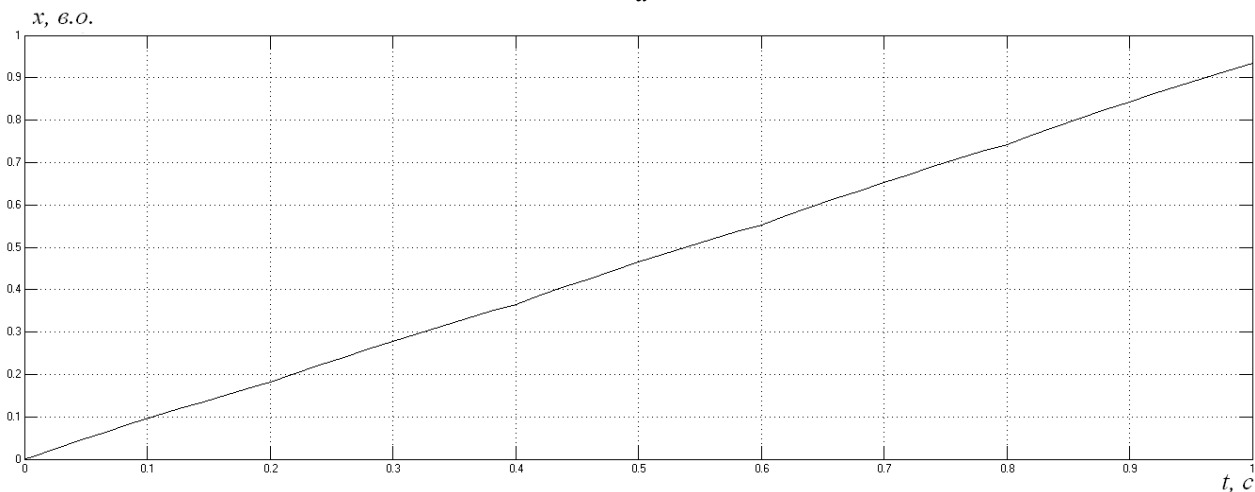
Аналіз отриманих результатів.

Аналіз якості системи при дії оптимального за комбінованим квадратичним критерієм керування є самостійною задачею та потребує окремого дослідження для кожного конкретного об'єкта керування. У межах цієї роботи розглянемо вплив періоду дискретизації на якість оптимізованої системи розімкненого керування інерційним об'єктом за структурною схемою на рис. 2.

На рис. 3 подані графіки зміни в часі керуючої дії (а) та вихідної координати об'єкта керування (б) за використаного раніше періоду дискретизації $\Delta t = 0,2$ с, що дорівнює 20 % від сталої часу об'єкта. Видно, що за даного Δt траєкторія вихідної координати відхиляється від оптимальної із похибкою в кінцевій точці за $t_k = 1,0$ с, що дорівнює 0,065 в.о. або 6,5 %.



а



б

Рис. 3. Графіки керуючої дії (а) та вихідної координати об'єкта керування (б) за $\Delta t = 0,2$ с

Зменшимо період дискретизації керуючої дії до 2 % від сталої часу об'єкта $\Delta t = 0,02$ с (рис. 4 а). Із графіку зміни в часі вихідної координати об'єкта керування (рис. 4 б) видно значне наближення траєкторії вихідної координати до оптимальної із похибкою в кінцевій точці за $t_k = 1,0$ с, що дорівнює 0,005 в.о. або 0,5 %.

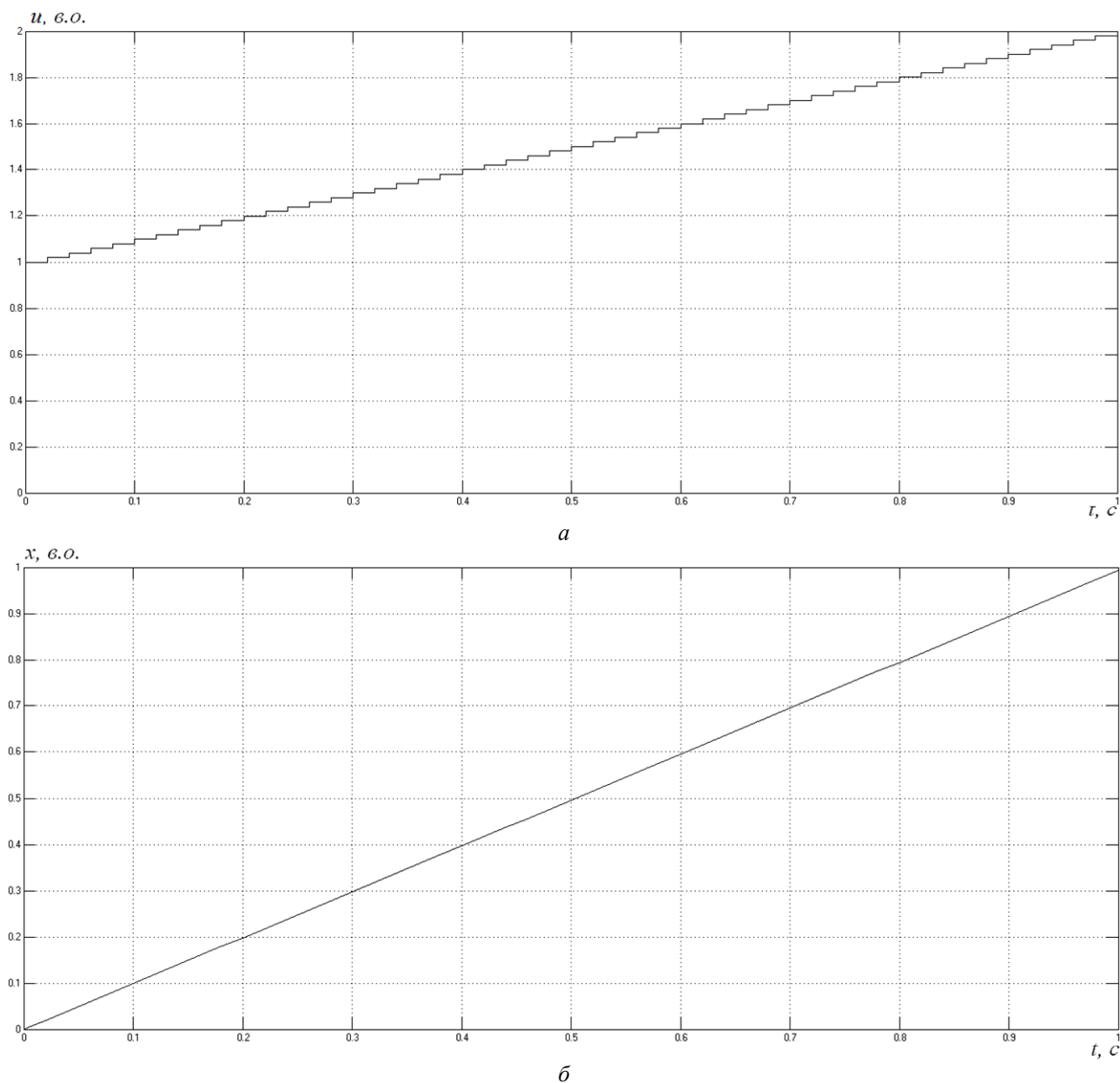


Рис. 4. Графіки керуючої дії (а) та вихідної координати об'єкта керування (б) за $\Delta t = 0,02$ с

Загалом можна сказати, що при виборі періоду дискретизації слід дотримуватись положень імпульсної теореми Котельникова-Шеннона та рекомендацій щодо проектування цифрових систем керування [13, 14].

Висновки. Застосування комбінованого квадратичного критерію оптимальності, де функціонал якості являє собою квадратичну форму координат стану об'єкта та керуючих дій, дає змогу враховувати точність відтворення заданої дії та обмеження на енергетичні витрати. Отримано скалярні рівняння динамічного програмування в дискретній формі одномірних систем оптимального керування інерційними об'єктами першого порядку та на їхній основі знайдено оптимальний за комбінованим квадратичним критерієм дискретний закон керування такими об'єктами. Визначено, що такий оптимальний закон керування є лінійним за часом. Отримані результати можуть бути розповсюджені й на багатомірні системи оптима-

льного керування об'єктами вищих порядків при заміні в рівняннях динамічного програмування скалярних величин векторними.

1. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л.: Энергия, 1977. 280 с.
2. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1996. 384 p.
3. Григоров О.В., Ловейкін В.С. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідійомних машин. К.: ІЗМН, 1997. 264 с.
4. Григоров О.В., Петренко Н.О. Вантажопідійомні машини. Х.: НТУ „ХПІ”, 2005. 304 с.
5. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Динаміка і оптимізація режимів руху мостових кранів. Київ: ТЦ Компрінт, 2016. 314 с.
6. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. К.: Либідь, 2007. 656 с.
7. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Оптимізація руху вантажопідійомного крана із траверсною підвіскою вантажу методом динамічного програмування. *Машинобудування*. 2012. № 10. С. 15-32.
8. Gui-kai Sun, Chong-xun Mo, Qun-chao Du and Fang-gui Liu. Study on the stochastic dynamic programming method based on the expected benefit. *2010 International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering*, Wuhan, China, 2010. Pp. 1272–1275. DOI: <https://doi.org/10.1109/MACE.2010.5536366>.
9. Шуруб Ю.В. Розробка системи керування трифазно-однофазних асинхронних електроприводів при випадкових навантаженнях. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2012. Вип.1(17). С. 12–15.
10. Чорний О.П., Ноженко В.Ю., Титюк В.К., Данилейко О.К. Дослідження пуску частотно-регульованого електроприводу зарезонансної вібраційної машини. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика»*. 2020. № 4 (1358). С. 19–25. DOI: <https://doi.org/10.20998/2079-8024.2020.4.02>
11. Шуруб Ю.В., Руденський А.А. Застосування неперервних рівнянь динамічного програмування для визначення оптимальних законів керування автоматичних систем. *Енергетика і автоматика*. 2025. № 1. С. 17–26. DOI: [https://doi.org/10.31548/energiya1\(77\).2025.017](https://doi.org/10.31548/energiya1(77).2025.017)
12. Головінський Б.Л., Шуруб Ю.В., Лисенко В.П. Теорія автоматичного управління. Київ: Вид. Центр НУБІП України, 2012. 240 с.
13. Franklin G. F., Powell J. D., Workman M. L. Digital Control of Dynamic Systems. AddisonWesley, 1998. 742 p.
14. Шуруб Ю.В., Цицюрський Ю.Л. Вибір періоду дискретизації цифрових регуляторів промислових електроприводів. *Праці інституту електродинаміки Національної академії наук України*. 2025. Вип. 72. С. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.15407/publishing2025.72.071>

DETERMINATION OF THE DISCRETE OPTIMAL BY THE COMBINED QUADRATIC CRITERIA CONTROL LAW OF INERTIAL OBJECT USING THE DYNAMIC PROGRAMMING METHOD

Yu.V. Shurub¹, A.A. Rudenskiy²

1 – Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Beresteyskiy ave., 56, Kyiv, 03057, Ukraine

2 – National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroiv Oborony str., 15, Kyiv, 03041, Ukraine

e-mail: yvshur@ukr.net

The article is devoted to obtaining a method for determining the optimal combined quadratic criterion of the inertial object control law using the discrete dynamic programming method. The use of the combined quadratic criterion of optimality allows to ensure the accuracy of the technological process execution and the limitation of energy consumption. The quality functional of the combined quadratic criterion of optimality represents the quadratic form of the coordinates of the object state and control actions. It is determined that the optimal by the combined quadratic criterion control law of the inertial object is linear in discrete time. The influence of the sampling period on the accuracy of reproducing the optimal trajectory of the output coordinate of the control object is analyzed. Ref. 14, fig. 4, table.

Keywords: optimal control, dynamic programming, quality functional, optimality criterion.

1. Petrov Yu.P. Variational methods of optimal control theory. L.:Energija, 1977. 280 p. (Rus)
2. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1996. 384 p.
3. Grigorov O.V., Lovejkin V.S. Optimal control of the movement of lifting machinery mechanisms. Kyiv, Ukraine: IZMN, 1997. 264 p. (Ukr)
4. Grigorov O.V., Petrenko V.S. Lifting machines. Kharkiv: NTU KhPI, 2005. 304 p. (Ukr)

5. Loveykin V.S., Romasevich Yu.O. Dynamics and optimization of traffic overhead cranes. Kiyv: TsP KOMPRINT, 2016. 314 p. (Ukr)
6. Popovych M.G., Kovalchuk O.V. Theory of automatic control: textbook. Kyiv: Lybid, 2007. 656 p. (Ukr)
7. Loveykin V.S., Romasevich Yu.O. Optimization of the movement of a crane with a traverse suspension of the load using the dynamic programming method. *Mechanical engineering*. 2012. No 10. Pp. 15–32. (Ukr)
8. Gui-kai Sun, Chong-xun Mo, Qun-chao Du and Fang-gui Liu. Study on the stochastic dynamic programming method based on the expected benefit. *2010 International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering*, Wuhan, China, 2010. Pp. 1272–1275. DOI: <https://doi.org/10.1109/MACE.2010.5536366>.
9. Shurub Yu.V. Working out of system of control of three-one phase induction electric drives at random loads. *Elektromekhanichni i energozberigayuchi systemy*. 2012. No 1. Pp. 12–15. (Ukr)
10. Chornyi O.P., Nozhenko V.Yu., Tytiuk V.K., Danileyko O.K. Study of starting a frequency-regulated electric drive of above resonance vibration machine. *Bulletin of the National Technical University KhPI. Series Problems of the automated electric drive. Theory and practice*. 2020. No 4 (1358). Pp. 19–25. (Rus) DOI: <https://doi.org/10.20998/2079-8024.2020.4.02>
11. Shurub Y., Rudenskiy A. Application of continuous dynamic programming equations to determine optimal control laws of automated systems. *Energy and Automation*. 2025. No 1. Pp. 17–26. (Ukr) DOI: [https://doi.org/10.31548/energiya1\(77\).2025.017](https://doi.org/10.31548/energiya1(77).2025.017)
12. Golovinskiy B.L., Shurub Yu.V., Lysenko V.P. Theory of automatic control. Kiyv: NUBIPU, 2012. 240 p. (Ukr)
13. Franklin G. F., Powell J. D., Workman M. L. Digital Control of Dynamic Systems. AddisonWesley, 1998. 742 p.
14. Shurub Yu.V., Tsitsyurskiy Yu.L. Selection of the sampling period of digital regulators of industrial electric drives. *Pratsi Instytutu Elektrodynamiky NAN Ukrainy*. 2025. No 72. Pp. 71–81. (Ukr) DOI: <https://doi.org/10.15407/publishing2025.72.071>

Надійшла: 07.04.2026

Прийнята: 27.04.2026

Submitted: 07.04.2026

Accepted: 27.04.2026